



Voie d'Approfondissement HTI
IMA4509 | *Analyse des Contenus Visuels*

Géométrie différentielle
pour l'analyse d'images et de formes

Nicolas Rougon

Institut Mines-Télécom / Télécom SudParis

Département ARTEMIS

nicolas.rougon@telecom-sudparis-sudparis.eu

Introduction

Dédiée à la description et à la mesure de la géométrie locale des objets, la géométrie différentielle est un outil fondamental pour l'analyse d'image et de forme. On l'utilise notamment pour décrire :

- la géométrie d'objets de \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$), issus de modeleurs 3D ou de capteurs de profondeur, ou utilisés comme modèles à des fins d'analyse (*e.g.* contours actifs);
- la géométrie locale des images modélisées comme des surfaces topographiques $z = L(\mathbf{x})$. Cette représentation¹ est valide en toute dimension (une image n D étant vue comme une surface de \mathbb{R}^{n+1}), se généralise aux images multicomposantes (une image à n canaux étant modélisée comme une surface dans \mathbb{R}^{n+2}), et s'applique à l'imagerie dynamique (une séquence d'images n D étant considérée comme une surface spatio-temporelle dans \mathbb{R}^{n+2})².

Dans chaque cas, la géométrie différentielle donne également accès à la géométrie locale des *sous-variétés* des objets étudiés. Elle permet ainsi :

- pour un objet 3D, d'extraire les lignes singulières tracées sur sa surface. Un exemple d'application concerne la chirurgie orthopédique, où les lignes de courbure extrême d'une surface osseuse (segmentée à partir de données CT) ont une pertinence anatomique;
- pour une image n D, de caractériser les *ensembles de niveaux* les lignes singulières de la surface de luminance, liées aux contours/arêtes des objets imagés et à leurs occlusions.

De façon remarquable, la géométrie différentielle fournit un cadre théorique adapté à des grandeurs mathématiques très différentes : d'une part, des objets de l'espace euclidien ambiant; d'autre part, des cartes de mesures d'énergie (mono- ou multispectrales) reflétant la structure et les propriétés physiques de la scène imagée.

Les outils de géométrie différentielle utilisés en imagerie numérique et en infographie (*computer graphics*) relèvent de deux grandes familles d'approches pour la modélisation des données :

- d'une part, une **modélisation continue** où le support des données est un domaine de \mathbb{R}^n . Les outils sont ici relativement classiques, renvoyant aux programmes de classes préparatoires et premier cycle universitaire. Le but de ce document est d'en faire un bref rappel à valeur d'aide mémoire pour la Voie d'Approfondissement HTI. Un excellent ouvrage de référence, couvrant largement le spectre des méthodes utilisées en imagerie numérique, est celui de Do Carmo [1]. Pour un panorama exhaustif, on se reportera à la monographie de Spivak [2].
- d'autre part, une **modélisation discrète** où le support des données est un domaine de \mathbb{Z}^n . Ce cadre non-standard a motivé des développements spécifiques des mathématiques appliquées, telles la géométrie discrète (*discrete geometry*) et la géométrie algorithmique (*computational geometry*). Les outils associés sont d'un usage courant en analyse de formes et en infographie, où ils interviennent dans des problématiques telles la génération et l'optimisation de maillages, ou le calcul de squelettes. Certaines de ces notions feront l'objet d'exposés spécifiques dans le cadre des modules d'HTI.

¹On parle encore de *graphe* ou de *surface de Monge*.

²Ainsi, un volume 3D IRM est descriptible comme une hypersurface de \mathbb{R}^4 , une image couleur comme une sous-variété de \mathbb{R}^5 , et une image multispectrale Meteosat (12 canaux) comme une hypersurface de \mathbb{R}^{14} .

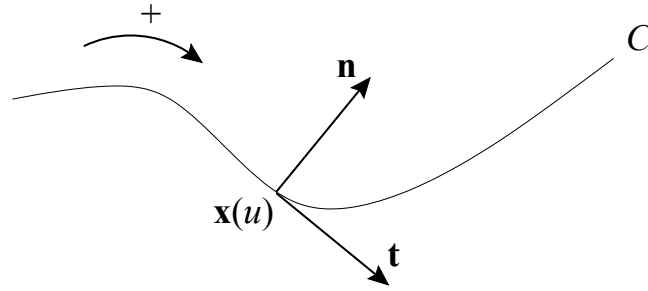


Figure 1: Géométrie d'une courbe plane.

1 Géométrie différentielle des courbes et surfaces

1.1 Notations

Dans ce document, nous adoptons les notations suivantes :

- les vecteurs, matrices et tenseurs sont désignés par des symboles gras, *e.g.* $\mathbf{x} = (x, y)^T$, $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$;
- les dérivées sont notées de manière indicielle :
 - pour une fonction scalaire monovariée $f(x)$, on pose ainsi $f_x = \frac{df}{dx}$, $f_{xx} = \frac{d^2f}{dx^2} \dots$
 - pour une fonction vectorielle monovariée $\mathbf{f}(x) = [f_1(x) \dots f_n(x)]^T$, on note $\mathbf{f}_x = [\frac{df_1}{dx} \dots \frac{df_n}{dx}]^T$;
 - de même, les dérivées partielles d'une fonction scalaire multivariée $f(x, y)$ sont notées $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \dots$
- le produit scalaire euclidien et la norme L^2 sont respectivement notés \cdot et $|\cdot|$.

1.2 Courbes planes

Soit \mathcal{C} une courbe simple orientée du plan euclidien \mathcal{E}_2 , muni d'un repère cartésien orthonormé $[\mathbf{i}, \mathbf{j}]$. Nous désignons par \mathbf{t} (resp. \mathbf{n}) le vecteur unitaire tangent (resp. normal) au point $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ ($|\mathbf{t}| = |\mathbf{n}| = 1$). $[\mathbf{t}, \mathbf{n}]$ définit un repère local orthonormé direct, appelé *repère de Frenet*.

Nous considérons une représentation *explicite* de \mathcal{C}

$$\mathcal{C} = \{ \mathbf{x}(u) \mid u \in \Lambda \} \quad (1)$$

définie par une *paramétrisation* u sur l'espace abstrait³ $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$. A tout $u \in \Lambda$ correspond ainsi un unique point $\mathbf{x}(u) = [x(u), y(u)]^T \in \mathcal{C}$. **La géométrie locale de \mathcal{C} s'exprime alors via les dérivées partielles de \mathbf{x} relativement au paramètre u .**

³ Λ est appelé *support* de la paramétrisation.

Le vecteur \mathbf{x}_u est tangent à \mathcal{C} . Sa norme $|\mathbf{x}_u|$ mesure l'amplitude du déplacement de \mathbf{x} dans l'espace \mathcal{T}_x localement tangent à \mathcal{C} lors d'une variation infinitésimale $u \rightarrow u + \delta u$ du paramètre. Pour cette raison, $|\mathbf{x}_u|$ est appelée *métrique* (ou encore *vitesse*) le long de \mathcal{C} , et noté v :

$$\mathbf{x}_u = v \mathbf{t} \tag{2}$$

$$v = |\mathbf{x}_u| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2} \tag{3}$$

La métrique n'est définie que si $v \neq 0$, *i.e.* si la paramétrisation u est *injective* : c'est la *condition d'admissibilité* de la paramétrisation. Parmi toutes les paramétrisations admissibles, il existe une paramétrisation remarquable, notée s , qui normalise la métrique :

$$|\mathbf{x}_s| = 1 \tag{4}$$

s est appelée *paramétrisation normale* ou *abscisse curviligne*⁴. On a donc :

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{t} \tag{5}$$

En réécrivant (2) sous la forme :

$$\mathbf{x}_u = v \mathbf{x}_s \tag{6}$$

on met en évidence la relation entre une paramétrisation arbitraire u et l'abscisse curviligne s :

$$\frac{d}{du} = v \frac{d}{ds} \tag{7}$$

soit encore :

$$ds = v du \tag{8}$$

On tire également l'expression analytique de \mathbf{t} et \mathbf{n} :

$$\mathbf{t} = [x_s \ y_s]^T = \frac{1}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2}} [x_u \ y_u]^T \tag{9}$$

$$\mathbf{n} = [y_s \ -x_s]^T = \frac{1}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2}} [y_u \ -x_u]^T \tag{10}$$

L'évolution du repère de Frenet $[\mathbf{t}, \mathbf{n}]$ lors d'une variation infinitésimale $s \rightarrow s + \delta s$ du paramètre s est décrite par les *formules de Frenet*⁵ :

$$\mathbf{x}_{ss} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = k \mathbf{n} \tag{11}$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k \mathbf{t} \tag{12}$$

⁴Afin de souligner que s normalise \mathbf{x}_s pour la norme L^2 , on parle aussi de *paramétrisation normale euclidienne*. Il existe d'autres paramétrisations remarquables normalisant des critères métriques différents. C'est le cas de la *paramétrisation normale affine*, notée σ , qui normalise l'élément d'aire : $\det(\mathbf{x}_\sigma, \mathbf{x}_{\sigma\sigma}) = 1$. Elle permet d'élaborer une description non euclidienne de la géométrie locale des courbes planes, appelée *géométrie différentielle affine*.

⁵Ces équations constituent un cas particulier d'équations générales, valables en dimension arbitraire, appelées *équations du repère mobile* ou *équations de Frenet-Cartan*.

où k désigne la *courbure*⁶ au point \mathbf{x} . L'inverse k^{-1} de la courbure est appelé *rayon de courbure* de \mathcal{C} au point considéré. En désignant par θ l'angle $\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{t}}$ formé par le vecteur tangent \mathbf{t} avec l'axe \mathbf{i} du référentiel cartésien, on tire de (11) la définition suivante de la courbure :

$$k = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{v} \frac{d\theta}{du} \quad (13)$$

En dérivant (2) par rapport à u et en utilisant la formule de Frenet (11), on obtient :

$$\mathbf{x}_{uu} = v_u \mathbf{t} + kv^2 \mathbf{n} \quad (14)$$

d'où on déduit l'expression générale de la courbure suivante :

$$k = \frac{1}{v^3} (x_u y_{uu} - y_u x_{uu}) \quad (15)$$

On constate ainsi que :

- les dérivées de \mathbf{x} par rapport à l'abscisse curviligne s véhiculent uniquement des informations de forme (*i.e.* orientation (\mathbf{t}, \mathbf{n}) et courbure k). Pour cette raison, on parle de *paramétrisation intrinsèque* de la courbe;
- pour une paramétrisation arbitraire, les dérivées de \mathbf{x} par rapport à u mettent en jeu à la fois des informations de forme et de métrique (*i.e.* v). On parle dans ce cas de *paramétrisation extrinsèque* de la courbe. En particulier, \mathbf{x}_{uu} possède une composante tangentielle générée par la variation v_u de la métrique.

Une autre famille de grandeurs géométriques caractéristiques de \mathcal{C} est constituée par ses mesures intégrales, comprenant :

- sa longueur $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ (finie ou infinie) :

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \int_{\Lambda} v du = \int_{\Lambda} ds \quad (16)$$

- dans le cas d'une courbe fermée, l'aire $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ du domaine D qu'elle délimite :

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \iint_D dx dy$$

Le théorème de Green-Stokes permet de réécrire cette intégrale de domaine sous forme d'une intégrale curviligne :

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} \det(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) ds = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} \det(\mathbf{x}, \mathbf{x}_u) du \quad (17)$$

⁶ k étant liée à une variation de la paramétrisation normale euclidienne s , on parle aussi de *courbure euclidienne*. En changeant la condition de normalisation de la métrique, on définit d'autres mesures de courbure, telles la *courbure affine* associée à l'abscisse curviligne affine σ .

1.3 Surfaces

La géométrie différentielle des surfaces dans l'espace euclidien \mathcal{E}_3 est une extension de la géométrie différentielle des courbes planes. L'accroissement de la dimension de l'espace ambiant, et par là-même de celle du support de la paramétrisation des objets étudiés, implique de passer d'un cadre scalaire à un cadre *tensoriel* permettant de décrire une complexité géométrique plus importante. Les concepts fondamentaux (espace tangent, métrique, courbure) demeurent, mais sont exprimés via des grandeurs différentielles de dimension supérieure : les tenseurs.

Soit \mathcal{S} une surface orientée de l'espace euclidien \mathcal{E}_3 muni d'un repère cartésien orthonormé $[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$. Nous désignons par $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}$ (resp. \mathbf{n}) le plan localement tangent (resp. vecteur normal unitaire ($|\mathbf{n}| = 1$)) en $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$. Il existe une infinité de repères orthonormés de $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}$, et par conséquent une infinité de repères de Frenet le long de \mathcal{S} . Pour le moment, nous n'en particulierisons aucun.

1.3.1 Cas général

Considérons une représentation explicite de \mathcal{S}

$$\mathcal{S} = \{ \mathbf{x}(u_1, u_2) \mid (u_1, u_2) \in \Lambda \} \quad (18)$$

définie par une paramétrisation (u_1, u_2) sur un domaine abstrait $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^2$, spécifiant de manière unique tout point $\mathbf{x}(u_1, u_2) = [x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2)]^T \in \mathcal{S}$. **La géométrie locale de \mathcal{S} s'exprime via les dérivées partielles de \mathbf{x} relativement aux paramètres (u_1, u_2) .**

Les vecteurs \mathbf{x}_{u_1} et \mathbf{x}_{u_2} appartiennent au plan tangent $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}$. Une variation infinitésimale des paramètres (u_1, u_2) de \mathbf{x} génère dans $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}$ un déplacement $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_{u_1} du_1 + \mathbf{x}_{u_2} du_2$. Son amplitude est donnée par

$$|d\mathbf{x}|^2 = \begin{pmatrix} du_1 & du_2 \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \end{pmatrix}^T \quad (19)$$

où \mathbf{M} est le *tenseur métrique* défini par :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{u_1} \cdot \mathbf{x}_{u_1} & \mathbf{x}_{u_1} \cdot \mathbf{x}_{u_2} \\ \mathbf{x}_{u_1} \cdot \mathbf{x}_{u_2} & \mathbf{x}_{u_2} \cdot \mathbf{x}_{u_2} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad (20)$$

La forme quadratique (19) induite par \mathbf{M} sur $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}$ est appelée *première forme quadratique fondamentale* de \mathcal{S} . La paramétrisation (u_1, u_2) est admissible ssi \mathbf{M} est défini *i.e.* : $\det(\mathbf{M}) = EG - F^2 \neq 0$. Le scalaire

$$g = \sqrt{\det(\mathbf{M})} = |\mathbf{x}_{u_1} \wedge \mathbf{x}_{u_2}| \quad (21)$$

représente la mesure d'aire élémentaire le long de \mathcal{S} . La paramétrisation (s_1, s_2) telle que $\mathbf{M} = \text{Id}$ normalise g et est appelée *paramétrisation normale euclidienne*. La normale \mathbf{n} s'exprime par :

$$\mathbf{n} = \frac{1}{g} \mathbf{x}_{u_1} \wedge \mathbf{x}_{u_2} \quad (22)$$

Revenons un instant au cas des courbes planes. La formule de Frenet (14) montre que la courbure k d'une courbe plane s'exprime par :

$$k = \frac{1}{v^2} \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n}$$

La courbure correspond donc à la composante de \mathbf{x}_{uu} sur \mathbf{n} , normalisée par le carré de la métrique. L'extension de ce résultat aux surfaces de \mathcal{E}_3 implique, comme pour les propriétés métriques, l'adoption d'un cadre tensoriel. Considérons par conséquent le tenseur symétrique \mathbf{N} défini par

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{u_1 u_1} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{x}_{u_1 u_2} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{x}_{u_1 u_2} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{x}_{u_2 u_2} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} \quad (23)$$

En normalisant \mathbf{N} par le tenseur métrique, on obtient le tenseur symétrique suivant⁷

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Gl - Fm & Gm - Fn \\ Em - Fl & En - Fm \end{pmatrix} \quad (24)$$

appelé *tenseur de courbure* qui synthétise l'ensemble des propriétés de courbure en $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$. Ainsi, la courbure de \mathcal{S} dans une direction $\mathbf{t} \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}$ ($|\mathbf{t}| = 1$) est donnée par la *seconde forme quadratique fondamentale* :

$$k_{\mathbf{t}} = \mathbf{t}^T \mathbf{C} \mathbf{t} \quad (25)$$

Comme tout tenseur, \mathbf{C} est entièrement caractérisé par ses éléments propres :

- ses valeurs propres (k_{\max}, k_{\min}) sont appelées *courbures principales*;
- ses vecteurs propres ($\mathbf{t}_{\max}, \mathbf{t}_{\min}$) déterminent les *directions principales* de \mathcal{S} au point considéré ($|\mathbf{t}_{\max}| = |\mathbf{t}_{\min}| = 1$).

La courbure principale maximale k_{\max} (resp. minimale k_{\min}) correspond au maximum (resp. minimum) de la courbure directionnelle $k_{\mathbf{t}}$ ($\mathbf{t} \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}$), qui est atteint pour $\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\max}$ (resp. $\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\min}$). Cette décomposition en éléments propres permet d'exprimer \mathbf{C} sous la forme :

$$\mathbf{C} = k_{\max} (\mathbf{t}_{\max} \mathbf{t}_{\max}^T) + k_{\min} (\mathbf{t}_{\min} \mathbf{t}_{\min}^T) \quad (26)$$

L'équation (25) se réécrit alors :

$$k_{\mathbf{t}} = k_{\max} (\mathbf{t}_{\max} \cdot \mathbf{t})^2 + k_{\min} (\mathbf{t}_{\min} \cdot \mathbf{t})^2$$

En désignant par θ l'angle $\widehat{\mathbf{t}, \mathbf{t}_{\max}}$ formé par \mathbf{t} avec \mathbf{t}_{\max} , et compte-tenu de l'orthogonalité des directions principales, on obtient :

$$k_{\mathbf{t}} = k_{\max} \cos^2 \theta + k_{\min} \sin^2 \theta \quad (27)$$

L'équation (27) est celle d'une ellipse dont la longueur des axes correspond aux courbures principales. Elle constitue une représentation géométrique du tenseur de courbure.

Les invariants de similitude de \mathbf{C} sont sa trace H et son déterminant K , appelés respectivement *courbure moyenne* et *courbure gaussienne* :

$$H = \frac{1}{2} (k_{\max} + k_{\min}) \quad (28)$$

$$K = k_{\max} k_{\min} \quad (29)$$

⁷Le produit de 2 tenseurs symétriques est un tenseur symétrique. Il en résulte l'identité : $Em - Fl = Gm - Fn$

Les courbures principales sont les racines du polynôme caractéristique de \mathbf{C} . Compte-tenu des relations entre coefficients et racines, ce polynôme s'écrit donc sous la forme :

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0$$

Un calcul direct à partir de l'expression (24) conduit à l'expression équivalente :

$$(EG - F^2)\lambda^2 + (Gl - 2Fm + En)\lambda + (ln - m^2) = 0$$

Par identification, on obtient :

$$H = \frac{lG - 2mF + nE}{2(EG - F^2)} \quad (30)$$

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} \quad (31)$$

Les courbures principales sont alors données par :

$$k_{\max/\min} = H \pm \sqrt{H^2 - K} \quad (32)$$

Les directions principales se calculent en résolvant, pour $k = k_{\max}$ et $k = k_{\min}$, l'équation :

$$\mathbf{C} \mathbf{t} = k \mathbf{t} \quad (33)$$

Dans un souci d'exhaustivité, nous en donnons les expressions analytiques :

$$k_{\max/\min} = \frac{lG - 2mF + nE \pm \sqrt{(lG - nE)^2 + 4(mF - lF)^2}}{2(EG - F^2)} \quad (34)$$

$$\mathbf{t}_{\max/\min} = \frac{1}{2(nE - lG)} \left[1 \frac{2(lF - mE)}{nE - lG \pm \sqrt{(lG - nE)^2 + 4(mF - lF)^2}} \right]^T \quad (35)$$

L'aire $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ de la surface est obtenue par intégration de l'élément d'aire g défini par (21) :

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \int_{\Lambda} g du_1 du_2 \quad (36)$$

Dans le cas d'une surface fermée, le volume $\mathcal{V}(\mathcal{S})$ du domaine qu'elle délimite s'obtient via le théorème de Green-Stokes :

$$\mathcal{V}(\mathcal{S}) = -\frac{1}{3} \int_{\Lambda} \det(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{u_1}, \mathbf{x}_{u_2}) du_1 du_2 \quad (37)$$

On remarquera que ces expressions généralisent les équations (16,17) du cas 2D.

1.3.2 Cas particulier: Images 2D

Une image 2D en niveaux de gris peut être représentée comme une surface topographique paramétrée par $(u_1, u_2) = (x, y)$, un pixel étant décrit par $[x, y, L(x, y)]^T$. Les résultats généraux obtenus au paragraphe précédent se particularisent alors sous la forme suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 + L_x^2 & L_x L_y \\ L_x L_y & 1 + L_y^2 \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$g = \sqrt{1 + L_x^2 + L_y^2} \quad (39)$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{g} [-L_x \quad -L_y \quad 1]^T \quad (40)$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{xy} & L_{yy} \end{pmatrix} \quad (41)$$

Le tenseur de courbure s'exprime par :

$$\mathbf{C} = \frac{1}{1 + L_x^2 + L_y^2} \begin{pmatrix} L_{xx}(1 + L_y^2) - L_x L_y L_{xy} & L_{xy}(1 + L_y^2) - L_x L_y L_{yy} \\ L_{xy}(1 + L_x^2) - L_x L_y L_{xx} & L_{yy}(1 + L_x^2) - L_x L_y L_{xy} \end{pmatrix} \quad (42)$$

ce qui conduit aux expressions suivantes pour les courbures moyennes et gaussiennes :

$$H = \frac{L_{xx}(1 + L_y^2) - 2L_x L_y L_{xy} + L_{yy}(1 + L_x^2)}{2(1 + L_x^2 + L_y^2)} \quad (43)$$

$$K = \frac{L_{xx} L_{yy} - L_{xy}^2}{1 + L_x^2 + L_y^2} \quad (44)$$

1.3.3 Généralisation en dimension arbitraire

Les concepts fondamentaux d'espace tangent, de tenseur métrique et tenseur de courbure se généralisent en dimension arbitraire. Etant donnée une paramétrisation $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \Lambda \subset \mathbb{R}^n$ d'une hypersurface \mathcal{S} de l'espace euclidien \mathcal{E}_{n+1} , on définit en tout point $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$:

1. l'espace tangent $\mathcal{T}_{\mathbf{x}} = \text{Span}(\mathbf{x}_{u_i})_{1 \leq i \leq n}$
2. le tenseur métrique $\mathbf{M} = (\mathbf{x}_{u_i} \cdot \mathbf{x}_{u_j})_{1 \leq i, j \leq n}$
3. l'élément d'aire $g = \det(\mathbf{x}_{u_1}, \dots, \mathbf{x}_{u_n})$
4. le tenseur de courbure $\mathbf{C} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}$ avec $\mathbf{N} = (\mathbf{x}_{u_i u_j} \cdot \mathbf{n})_{1 \leq i, j \leq n}$, dont les valeurs/vecteurs propres déterminent les courbures/directions principales, la courbure moyenne (resp. gaussienne) étant définie comme la moyenne (resp. le produit) des courbures principales.

On définit également

1. l'aire $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \int_{\Lambda} g du_1 \dots du_n$
2. pour une surface fermée, le volume limité $\mathcal{V}(\mathcal{S}) = \int_{\Lambda} \det(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{u_1}, \dots, \mathbf{x}_{u_n}) du_1 \dots du_n$

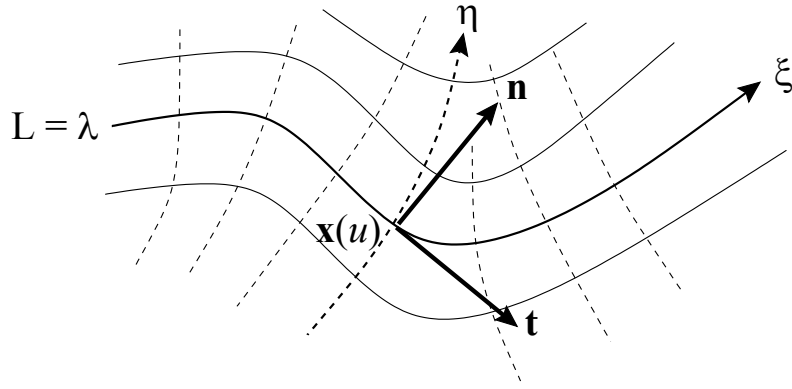


Figure 2: Géométrie des lignes de niveau d'une image 2D.

2 Géométrie différentielle des ensembles de niveau

Étudions maintenant la géométrie locale des courbes (surfaces) tracées sur les images représentées comme des surfaces topographiques \mathcal{S} de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) :

$$\mathcal{S} = \{ [\mathbf{x} \ L(\mathbf{x})]^T \mid \mathbf{x} \in \Omega \}$$

Nous nous intéressons spécifiquement aux *ensembles de niveau* (level sets) de l'image :

$$L_\lambda = \{ \mathbf{x} \in \Omega \mid L(\mathbf{x}) = \lambda \} \quad (45)$$

En appliquant les résultats généraux de géométrie différentielle des courbes/surfaces, nous pouvons préciser les notions d'espace tangent, de normale et de courbure de L_λ , à condition d'en disposer d'une paramétrisation \mathbf{u} . Le fait que L_λ soit une sous-variété de L laisse supposer que les formules obtenues, fonctions des dérivées partielles de \mathbf{x} par rapport à \mathbf{u} , se réexpriment en termes de dérivées partielles de L . Deux propriétés vont permettre de confirmer cette intuition :

1. Un ensemble de niveau d'une fonction L sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est dirigé par ∇L *i.e.* :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla L}{|\nabla L|} \quad (46)$$

En effet, étant donnée une paramétrisation (u_1, \dots, u_n) de L_λ , tout point $\mathbf{x} \in L_\lambda$ vérifie : $DL(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{u_i} \cdot \nabla L = 0$ avec $\mathbf{x}_{u_i} \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}$.

2. La *dérivée directionnelle*⁸ par rapport à un vecteur unitaire \mathbf{a} ($|\mathbf{a}| = 1$), définie comme la composante du gradient dans la direction \mathbf{a} :

$$\partial_{\mathbf{a}} = \mathbf{a} \cdot \nabla \quad (47)$$

s'interprète comme une dérivée ∂_s par rapport à une abscisse curviligne s le long d'une courbe localement tangente au vecteur \mathbf{a} . En effet : $\partial_{\mathbf{a}} \mathbf{x} = \mathbf{a} \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}$.

Nous appliquons ces propriétés successivement aux images 2D et 3D.

⁸Encore appelée *dérivée de Lie*.

2.1 Images 2D

Soit L une image définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et représentée comme une surface topographique \mathcal{S} . En tout point régulier $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ passent 2 courbes remarquables (Figure 2) :

- la ligne de niveau $L(\mathbf{x})$;
- la courbe orthogonale à la précédente, appelée *ligne de courant* (*stream line*).

Lignes de niveau et lignes de courant forment un réseau de courbes orthogonales, 2 à 2 disjointes, recouvrant la surface \mathcal{S} . Le repère de Frenet $[\mathbf{t}, \mathbf{n}]$ le long des lignes de niveau est donné par :

$$\mathbf{t} = \frac{1}{|\nabla L|} [L_y \quad -L_x]^T \quad (48)$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\nabla L|} [L_x \quad L_y]^T \quad (49)$$

Le repère de Frenet $[-\mathbf{n}, \mathbf{t}]$ le long des lignes de courant se déduit par rotation de $\pi/2$.

\mathbf{t} étant unitaire, la dérivée directionnelle $\partial_{\mathbf{t}}$ définit une abscisse curviligne ξ le long de la ligne de niveau :

$$\partial_{\mathbf{t}} := \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\nabla^\perp L}{|\nabla L|} \cdot \nabla \quad (50)$$

De même, la dérivée directionnelle $\partial_{\mathbf{n}}$ définit une abscisse curviligne η le long de la ligne de courant :

$$\partial_{\mathbf{n}} := \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\nabla L}{|\nabla L|} \cdot \nabla \quad (51)$$

On vérifie que $\mathbf{x}_\xi = \mathbf{t}$ et $\mathbf{x}_\eta = \mathbf{n}$. On dispose ainsi de paramétrisations **intrinsèques** des lignes de niveau et de courant, qui vont permettre de décrire leurs géométries locales respectives, et par conséquent la géométrie locale de l'image.

De (50,51) résultent immédiatement les identités :

$$L_\xi = 0 \quad (52a)$$

$$L_\eta = |\nabla L| \quad (52b)$$

La dérivée L_η s'interprète donc comme le contraste local. L est par définition constante le long d'une ligne de niveau, d'où l'annulation de la dérivée L_ξ . Ainsi, *localement, une seule dérivée partielle*⁹ *suffit à décrire les variations de L à l'ordre 1*. Du fait de cette propriété, le système de coordonnées local (ξ, η) est appelé **coordonnées de jauge** de l'image.

De la formule de Frenet (11) avec $s \equiv \xi$ et des équations (48,49,50), on tire l'expression de la courbure k^l des lignes de niveau :

$$k^l = -\frac{L_{\xi\xi}}{L_\eta} = -\frac{L_{xx}L_y^2 - 2L_xL_yL_{xy} + L_{yy}L_x^2}{|\nabla L|^3} \quad (53)$$

⁹Cette dégénérescence dimensionnelle n'est en fait qu'apparente, la dérivée directionnelle véhiculant une information vectorielle de même dimension que l'image.

De la formule de Frenet (12) avec $s \equiv \eta$ résulte l'expression de la courbure k^s des lignes de courant :

$$k^s = -\frac{L_{\xi\eta}}{L_\eta} = -\frac{(L_{xx} - L_{yy})L_xL_y + L_{xy}(L_y^2 - L_x^2)}{|\nabla L|^3} \quad (54)$$

Les propriétés de courbure de l'image sont donc reliées aux dérivées secondes de L relativement aux coordonnées (ξ, η) . Cette remarque se généralise aux ordres de dérivation supérieurs : **toute caractéristique géométrique des lignes de niveau ou de courant s'exprime en termes de dérivées partielles relativement aux coordonnées de jauge**. La réciproque est fautive. Ainsi, le scalaire δ^s défini par :

$$\delta^s = \frac{L_{\eta\eta}}{L_\eta} = \frac{L_{xx}L_x^2 + 2L_xL_yL_{xy} + L_{yy}L_y^2}{|\nabla L|^3} \quad (55)$$

n'est pas relié à une grandeur géométrique. Il s'agit simplement de la variation relative $\frac{\partial \ln L_\eta}{\partial \eta}$ du contraste L_η dans la direction normale à la ligne de niveau.

2.2 Images 3D

Les concepts précédents se généralisent au cas des images 3D. Les ensembles de niveau L_λ sont alors des surfaces dont la normale \mathbf{n} , colinéaire à ∇L (équation (46)), induit une paramétrisation η des lignes de courant. En considérant 2 vecteurs unitaires orthogonaux $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \in \mathcal{T}_x$ tangents à L_λ (e.g. les directions principales de \mathcal{S}), on définit de même une paramétrisation locale (ξ_1, ξ_2) de L_λ . On obtient ainsi un système de coordonnées de jauge (ξ_1, ξ_2, η) de L , tel que :

$$L_{\xi_1} = 0 \quad (56a)$$

$$L_{\xi_2} = 0 \quad (56b)$$

$$L_\eta = |\nabla L| \quad (56c)$$

Les propriétés de courbure de L_λ s'expriment en fonction des dérivées secondes relativement aux coordonnées de jauge. Ainsi, les courbures $k_{\mathbf{t}_1}$ ($k_{\mathbf{t}_2}$) dans la direction \mathbf{t}_1 (\mathbf{t}_2) sont données par :

$$k_{\mathbf{t}_1} = -\frac{L_{\xi_1\xi_1}}{L_\eta}$$

$$k_{\mathbf{t}_2} = -\frac{L_{\xi_1\xi_2}}{L_\eta}$$

On en déduit que la courbure moyenne H^l des ensemble de niveau est donnée par :

$$H^l = -\frac{L_{\xi_1\xi_1} + L_{\xi_2\xi_2}}{L_\eta} \quad (57)$$

Un calcul direct montre que :

$$\frac{L_{\eta\eta}}{L_\eta} = \frac{L_{xx}L_x^2 + L_{yy}L_y^2 + L_{zz}L_z^2 + 2L_xL_yL_{xy} + 2L_xL_zL_{xz} + 2L_yL_zL_{yz}}{|\nabla L|^3} \quad (58)$$

Le laplacien $\Delta = \text{Trace}(D^2)$ étant invariant par changement de repère, on a :

$$L_{\xi_1\xi_1} + L_{\xi_2\xi_2} = \Delta L - L_{\eta\eta} \quad (59)$$

On en déduit l'expression de la courbure moyenne :

$$H^l = - \frac{L_{xx}(L_y^2 + L_z^2) + L_{yy}(L_x^2 + L_z^2) + L_{zz}(L_x^2 + L_y^2) - 2L_xL_yL_{xy} - 2L_xL_zL_{xz} - 2L_yL_zL_{yz}}{|\nabla L|^3} \quad (60)$$

Les expressions (58) et (60) généralisent le cas 2D, l'invariance par similitude se traduisant par leur symétrie. Enfin, en prenant le carré de l'identité (59) et en utilisant (60), on tire l'expression de la courbure gaussienne K^l des ensembles de niveau :

$$K^l = \frac{L_x^2(L_{yy}L_{zz} - L_{yz}^2) + L_y^2(L_{xx}L_{zz} - L_{xz}^2) + L_z^2(L_{xx}L_{yy} - L_{xy}^2) + 2L_xL_y(L_{xz}L_{yz} - L_{xy}L_{zz}) + 2L_yL_z(L_{xy}L_{xz} - L_{yz}L_{xx}) + 2L_xL_z(L_{xy}L_{yz} - L_{xz}L_{yy})}{|\nabla L|^3} \quad (61)$$

Les courbures principales se calculent alors à partir de l'équation (32).

References

- [1] M.P Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- [2] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish Inc., Houston, TX, 1979 (6 volumes).